

# Как не ошибаться

Сила математического мышления

Бестселлер The New York Times

Книгу рекомендует профессор  
психологии Гарвардского  
университета Стивен Пинкер

Издание получило положительные  
отзывы в The Washington Post, The Wall  
Street Journal, Scientific American



**Джордан Эллиенберг** – профессор математики в Висконсинском университете, эксперт по теории чисел и алгебраической геометрии, автор статей в The New York Times, The Washington Post и Wired.

## Основная идея

Зачем взрослому человеку математика? По мнению автора этой книги, чтобы понимать истинную суть информации, которую мы считаем априори верной, то есть чтобы мыслить критически. Рассказывая о математических задачах, закономерностях и казусах, Джордан Элленберг проводит параллели с реальной жизнью и показывает, что именно мы обычно упускаем из виду и как можно увидеть в уже известных фактах гораздо больше.

### Математика и здравый смысл

Многие люди уверены, что математика не пригодится им по окончании университета. Однако Джордан Элленберг опровергает это убеждение. По его мнению, математика помогает составить более глубокое и достоверное представление об окружающем мире. «Математика вплетена в ткань нашего мышления, – уверен автор. – Математика – это наука о том, как не совершать ошибок, а математические формы и методы выковывались на протяжении многих столетий упорного труда и дискуссий».

Во многом математика – то же самое, что и здравый смысл. Если посмотреть на некоторые математические законы и правила, то они интуитивно понятны. Например, прибавить шесть к четырем равнозначно тому, что прибавить четыре к шести.

Разумеется, далеко не все разделы математики столь же очевидны. Однако даже дифференциальное и интегральное исчисление берут свое начало из здравого смысла, убежден Элленберг. Ведь Ньютон не просто выдумал формулы, а изучил движение объекта по прямой линии, описал его и формализовал.

Математика позволяет многократно увеличить силу здравого смысла. «Несмотря на всю силу математики, ее абстрактность и символика, порой внушающие страх, истинная умственная работа, которая требуется в ней, мало чем отличается от того, как мы размышляем над решением простых повседневных задач», – пишет автор.

### Сила линейности

Линейность окружает нас каждый день. Каждый раз, когда вы утверждаете: «Если хорошо иметь нечто, то лучше иметь этого еще больше», – вы мыслите линейно. И это открывает путь множеству манипуляций и искажений. Например, американские политики могут говорить: «Если вы поддерживаете военные действия против Ирана, то наверняка предпочли бы осуществить сухопутную операцию против любой страны, которая лишь косо посмотрит в нашу сторону!»

Линейность мышления во многом поддерживается математическими выкладками. Скажем, если нарисовать правильный многоугольник с 65 536 сторонами, то выглядеть он будет практически как окружность. Площади этих фигур будут почти одинаковыми. И хотя окружность – это кривая, каждый ее фрагмент можно приблизить к идеально прямой линии (точно так же мы видим Землю плоской, хотя знаем, что ее форма близка к шару).

Линейное мышление является для нас естественным, потому что интуитивное восприятие времени и движения формируется у нас под воздействием явлений, которые мы наблюдаем в окружающем мире. Элленберг советует взять на вооружение фразу: «Локально прямая, глобально кривая» – и периодически вспоминать ее, когда вы ловите себя на линейном мышлении.

Автор приводит в пример статью, которую прочитал в журнале *Obesity*. Там было написано, что американцы употребляют слишком



Многие математические законы можно понять на уровне интуиции

# Пять основных мыслей

1

**Математика помогает составить более глубокое и достоверное представление об окружающем мире.**

2

**Линейное мышление является для нас естественным, потому что формируется под воздействием явлений, которые мы наблюдаем в окружающем мире. Однако то, что локально кажется прямой, может оказаться на самом деле кривой.**

3

**Большую опасность представляет собой не прямой обман, а ситуация, когда вам предоставляют достоверную информацию, но позволяют сделать из нее неверные выводы.**

4

**Есть немалая вероятность, что в научных экспериментах получают гораздо больше недостоверных данных, чем нам хотелось бы думать.**

5

**Условную границу, если придерживаться ее достаточно долго, можно ошибочно принять за то, что действительно происходит в реальном мире.**

много фаст-фуда и мало двигаются, поэтому к 2048 году все поголовно будут страдать от ожирения. «Спешу вас обрадовать, – пишет Элленберг. – Не все из нас в 2048 году будут страдать ожирением. Почему? Потому что не все линии прямые».

Рост количества людей с избыточным весом – факт. Если в начале 1970-х чуть менее половины американцев имели индекс массы тела больше 25, то 20 лет спустя их число возросло до 60%, а в 2008 году составило почти 75%. Но это вовсе не означает, что график представляет собой прямую линию, хотя именно такое предположение сделали авторы статьи. По мнению Элленберга, они совершили два преступления: против математики и против здравого смысла.

Итак, если пример линейного мышления – это желание свести сложную закономерность к прямой линии, то что такое нелинейное мышление? По мнению Элленберга, оно означает следующее: выбор конкретного пути зависит от того, где вы находитесь.

## Вероятность под микроскопом

Представьте себе, что однажды вы получаете письмо от брокера, который намекает вам, что на будущей неделе определенные акции подскочат в цене. Через некоторое время приходит новая рассылка, где упоминаются акции, которые скоро подешевеют. Такие письма вы получаете десять раз подряд – и всякий раз брокер оказывается прав. В 11-м письме он предлагает вам вложить деньги в свой инвестиционный фонд. Вы рассуждаете: скорее всего, этот брокер является хорошим специалистом в своем деле, ведь вероятность угадать десять раз подряд ничтожно мала (она составляет  $1/1024$ ). И решаете рискнуть своими сбережениями, рассчитывая на большую прибыль.

А теперь представьте, что брокер разослал в первую неделю 10 240 писем, половина из которых была с прогнозом о том, что курс акций вырастет, а половина – что он упадет. 5120 человек, которые получили неверный прогноз,

больше не получали писем от брокера. А оставшиеся 5120 были разделены на две группы: одной на второй неделе пришло письмо о том, что курс акций упадет, а второй – что он повысится. После этой недели осталось уже 2560 человек, получивших два правильных прогноза подряд. Этот процесс продолжался снова и снова, и после десятой недели обнаружилось 10 человек, которые все это время получали правильные

## Математика вплетена в ткань нашего мышления. Это наука о том, как не совершать ошибок

прогнозы. Если они согласятся на предложение брокера, то он сможет неплохо заработать, и при этом совершенно не имеет значения, понимает ли он хоть что-то в игре на бирже.

Хотя эта так называемая притча о балтиморском брокере и является вымышленной, она показывает ловушку, в которую мы часто рискуем угодить. Например, когда вы инвестируете свои деньги в фонд с невероятно высокой рентабельностью, вы можете попасть примерно в такую же ситуацию, как гипотетический получатель рассылки от балтиморского брокера. «Вы попали под влияние впечатляющих результатов, но ведь вам неизвестно, какие шансы на получение этих результатов были у этого брокера», – пишет автор.

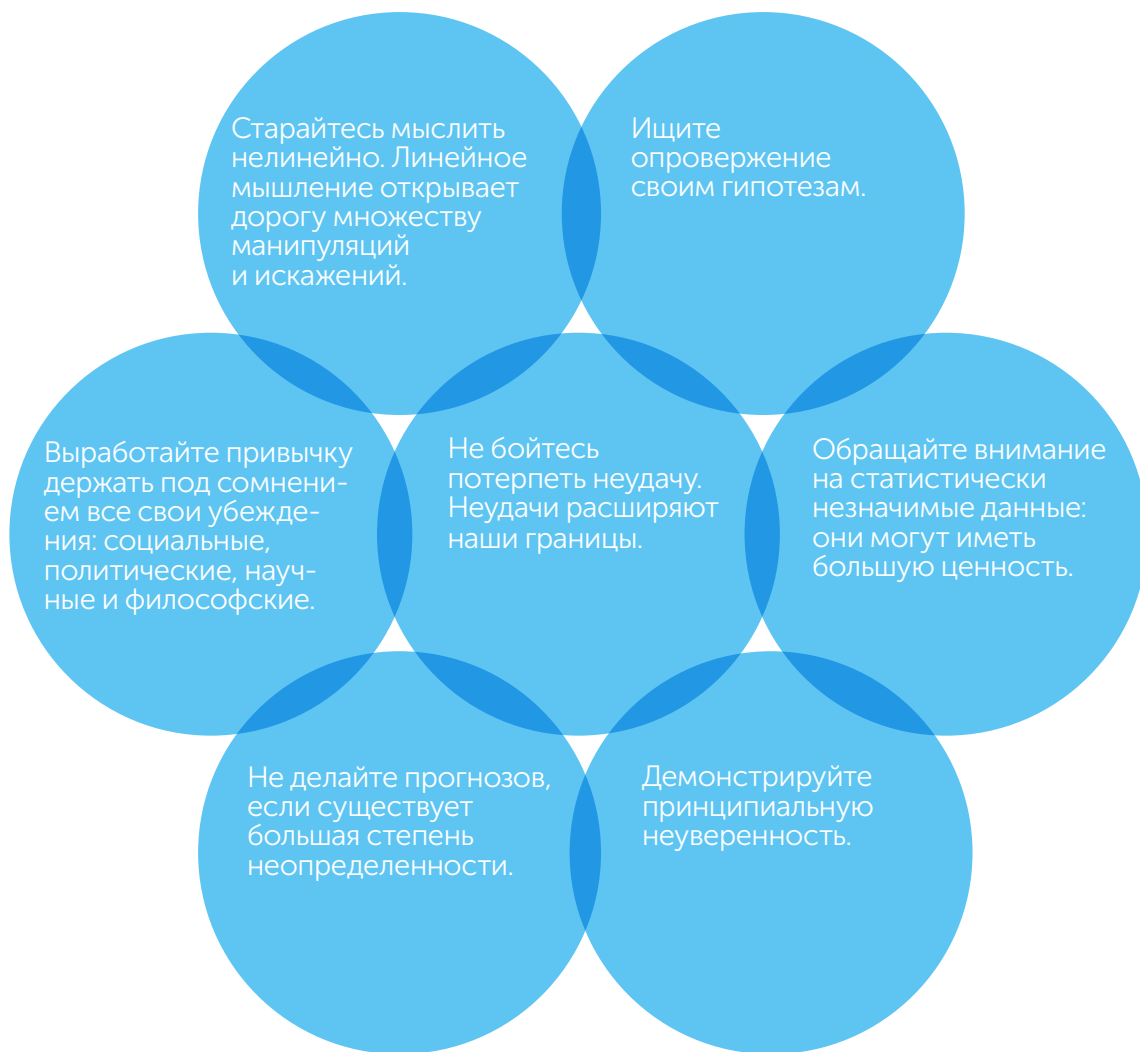
Как и многие хорошие фокусы, эта афера не является прямым обманом. По сути, вам предоставляют достоверную информацию, но позволяют сделать из нее неверные выводы.

## Ловушка значимости

Существует «наука» под названием гаруспиция, которая заключается в составлении предсказаний по внутренностям принесенных в жертву овец. Люди, которые этим занимаются, подходят к делу серьезно, в частности пишут

Для решения математических задач требуются те же усилия, что и для решения повседневных вопросов

Математические принципы, применимые в жизни и бизнесе



Есть риск, что в современной науке многие данные не являются достоверными

статьи и публикуют их в «Международном журнале гаруспиции».

У этого издания есть правило: все опубликованные результаты должны пройти проверку на статистическую значимость. Стандартный порог статистической значимости, установленный этим журналом, составляет 0,05, или 1 из 20. Другими словами, если одно ваше предсказание из 20 оправдалось, то вы можете смело его опубликовать.

В статье обычно приводится протокол «эксперимента», позволившего получить достоверное предсказание. Однако когда его пробует применить другой гаруспик, обычно это заканчивается провалом. Впрочем, об этом никто не узнает, ведь результаты неудачных экспериментов не публикуются. Кроме того, эксперты всегда могут объяснить неудачу мелкими отличиями в ходе проведения эксперимента.

«Современная медицина и социология – отнюдь не гаруспиция, – пишет автор. – Тем не менее в последние годы многие ученые все громче бьют тревогу: возможно, в науке гораздо больше данных, полученных в духе гадания на внутренностях животных, чем нам хотелось бы признавать».

Об этом в 2005 году заявил математик Джон Иоаннидис, который увлекся медико-биологическими исследованиями, в статье *Why Most Published Research Findings Are False* («Почему большинство публикуемых открытий оказываются ошибочными»). Он заявил, что некоторые сферы медицинских исследований относятся к категории «нулевых областей», в которых попросту нет фактического воздействия, поддающегося обнаружению.

В частности, он критикует исследования связи генов с заболеваниями. Пытаясь определить, какие гены отвечают за шизофрению, ученые могут анализировать сотни тысяч генов (точнее, генетических полиморфизмов – различий между геномами). Допустим, около десяти генов действительно могут оказывать клинически значимое воздействие на возникновение шизофрении. Оставшиеся 99 990 полиморфизмов не имеют никакого отношения к этой болезни. Однако один из двадцати полиморфизмов (около пяти тысяч!) может пройти проверку на статистическую значимость. В итоге получится в пятьсот раз больше фиктивных результатов, чем реальных. Не говоря уже о том, что иногда реальное воздействие может быть отброшено как статистически незначимое, если исследование недостаточно мощное, чтобы это воздействие обнаружить.

Принятая научным сообществом граница статистической значимости в 0,05 на самом деле условна. «Однако условную границу, если придерживаться ее достаточно долго, можно ошибочно принять за то, что действительно происходит в реальном мире», – пишет Эллиенберг. По его мнению, нужно дать возможность ученым составлять и публиковать отчеты о статистически незначимых данных. Ведь иногда и они могут представлять собой ценность.

Например, Верховный суд США в 2010 году единогласно вынес решение, что *Matrixx*, производитель средства от простуды *Zicam*, должен раскрыть данные о том, что отдельные пациенты, принимавшие препарат, столкнулись с потерей обоняния. Ведь хотя эта информация и не прошла проверку на статистическую значимость, она может представлять собой важный факт для инвесторов и пациентов. Иногда слабое доказательство – лучше, чем его отсутствие.

## Эпоха больших данных

В магазине *Target* в Миннесоте произошла история, свидетельствующая о наступлении эпохи больших данных. Статистическая модель, используемая для маркетингового анализа, пришла к выводу, что девочка-подросток беременна. Изо дня в день изучая покупки потребителей, бездушная машина смогла сделать правильный вывод – и начала присылать девушке купоны на товары для новорожденных, чем весьма удивила ее родителей.

## Нелинейное мышление означает, что выбор конкретного пути зависит от того, где вы находитесь

Многих пугает мысль о том, что машины скоро станут делать более точные выводы, чем люди. Однако, по мнению автора, бояться стоит скорее плохих алгоритмов, чем эффективных. Допустим, *Facebook* решит составить список потенциальных террористов, анализируя страницы людей, которые уже были осуждены за терроризм или поддерживали экстремистские организации. Автор рассматривает два вопроса, которые могут интересовать создателя подобного списка.

Вопрос первый: какова вероятность, что человек попадет в список *Facebook*, хотя он не террорист?

## Стоит задуматься

Где проходят условные границы, а где – реальные?

1  
Когда вы принимаете решение, какими категориями вы мыслите?

2  
3  
Не совершаете ли вы ошибку, когда отмахиваетесь от единичных фактов, противоречащих вашему мнению?

## Следует сделать

Развивать навыки критического мышления

1  
2  
Периодически ставить под сомнение свои убеждения и доказывать их себе заново

3  
Не стесняться признавать, что степень неопределенности слишком велика, чтобы принять обоснованное решение

Вопрос второй: какова вероятность, что человек не террорист, хотя он входит в список Facebook?

Эти вопросы отличаются друг от друга, хотя на первый взгляд и кажутся одинаковыми. Ответ на первый вопрос – около 1 из 2000, а на второй – 99,99%. И хотя значимым является именно ответ на второй вопрос, часто эти ответы путают, что представляет собой большую опасность.

Эллиенберг приводит в пример судебное заседание. Прокурор может заявить: «Есть один шанс из пяти миллионов, что ДНК невиновного человека совпадет с ДНК, обнаруженной на месте преступления». Это – ответ на первый вопрос. Однако задача присяжных – ответить на второй: какова вероятность, что, казалось бы, виновный подсудимый невиновен?»

Эта проблема может казаться далекой от повседневной реальности, но автор пишет, что в США Агентство национальной безопасности уже собирает информацию, являются ли жители пользователями Facebook, а также метаданные обо всех телефонных звонках. Скорее всего, списки потенциальных террористов уже существуют. «Мало приятного в том, что Target знает о вашей беременности, – пишет Эллиенберг. – Но гораздо хуже, если вы не террорист, но Facebook считает вас таковым».

## Почему люди играют в лотерею?

С точки зрения математики, покупка лотерейного билета – дело невыгодное. Все знают, что шансы выиграть – мизерны. Однако на протяжении более 200 лет лотереи остаются очень популярными.

Объяснить этот феномен могут экономисты. В частности, интересную гипотезу выдвинули Милтон Фридман и Леонард Сэвидж. Они предположили, что люди, которые играют в лотерею, мыслят категориями классов, а не денежных сумм. Например, если вы являетесь представителем среднего класса, то можете без потери своего социального статуса тратить

еженедельно немного денег на лотерейные билеты. По сути, вы ничего не теряете. Зато в случае выигрыша (пусть даже его вероятность очень мала) вы сможете перейти в более высокую социальную группу.

Эллиенберг называет это моделью смертного овра. Умирая, вы вряд ли будете переживать, что в течение жизни потратили некоторую сумму на лотерею. Однако если благодаря выигрышу вы в 35 лет сможете выйти на пенсию и уехать на Карибские острова, то это будет для вас чрезвычайно значимым.

Есть и еще одно, более простое, объяснение тому факту, что люди любят лотереи. Независимо от того, выиграете вы или нет, покупка билета представляет собой развлечение. В опросах игроки часто говорят, что перспектива выигрыша – основная причина участия. «Лотерея – это

Знание математики – своего рода рентгеновские очки, позволяющие увидеть структуру мира, скрытую под беспорядочной, хаотичной поверхностью

## Неуверенность – качество сильных людей, а не слабаков

игра, в которой люди платят штату небольшие комиссионные за несколько минут развлечения, которое штат может организовать с минимумом затрат», – говорит Эллиенберг.

В результате этой игры обе стороны получают свою порцию полезности. Покупатели билетов – развлечение, а государство – деньги, которые можно направить на повышение уровня комфортности жизни населения.

## Неопределенность и пророта

В студенческие годы Эллиенбергу предложили работу: исследователь из сферы здравоохранения попросил его оценить, сколько человек заболит туберкулезом в 2050 году. Ему предоставили массу данных об этом недуге, а задачей математика было составить модель, с помощью которой можно прогнозировать ее распространение на десятилетия вперед.

Через некоторое время Эллиенберг пришел к выводу, что он имеет дело со слишком



большой степенью неопределенности, а значит, не может дать даже приблизительную оценку этому явлению. Тем не менее именно этого требовал заказчик, и в итоге автору пришлось уступить. «Не сомневаюсь, что впоследствии он рассказывал многим о том, что в 2050 году X миллионов человек будут страдать туберкулезом, – пишет Элленберг. – Готов побиться об заклад: если кто-то спросил бы этого исследователя, откуда он об этом знает, он сказал бы: «Я нанял специалиста в области математики».

Из этой истории вовсе не следует, что автор рекомендует избегать ответов на сложные вопросы, чтобы всегда оставаться правым. Однако он считает, что неуверенность – это качество сильного человека, а не слабачка.

С одной стороны, математика – это точная наука, которая воспринимается многими как

ром из сериала «Звездный путь». Капитан Кирк решил поставить андроидов в парадоксальную ситуацию, и это привело к тому, что они вышли из строя (перед этим печально вздохнув: «Но это же нелогично!»). Этот принцип математики используют в доказательствах от противного: нужно держать в уме гипотезу, которую вы считаете ложной, и рассуждать так, будто она истинная.

Элленберг вспоминает, как руководитель докторской диссертации дал ему совет: когда вы упорно пытаетесь доказать теорему, вам следует доказывать ее днем и опровергать ночью. Зачем человеку могут понадобиться две противоречащие друг другу цели? Во-первых, вы можете заблуждаться: гипотеза, которую вы считаете истинной, на самом деле ложна. И если помимо доказательства теоремы вы пытаетесь ее опровергнуть, то вы застраховываете себя от полного поражения.

Во-вторых, если утверждение, которое вы пытаетесь опровергнуть, истинно, то с каждой новой попыткой вы все лучше понимаете, что мешает вам его опровергнуть, все лучше проникаете в суть вещей. Математики именно так и выходят на доказательство теоремы.

В этом случае неудача не является чем-то плохим. Напротив, она расширяет наши границы.

По мнению автора, принцип «доказывать днем и опровергать ночью» применим не только к математике. «На мой взгляд, держать под сомнением все свои убеждения, социальные, политические, научные и философские, – это хорошая привычка, – пишет Элленберг. – Верьте в то, во что вы верите, днем, но по ночам ищите доводы против самых ценных для вас предположений».

Если какие-то из ваших убеждений ложны, то со временем вы их опровергнете и тем самым приблизитесь к истине. А если разубедить себя не удастся, то вы сможете гораздо лучше понять, почему вы верите в то, во что верите ●●

## Днем верьте в то, во что вы верите, но по ночам ищите доводы против самых ценных для вас предположений

способ установления истины. Но с другой, она является инструментарием, который позволяет рассуждать о неопределенности и порой «приручать» ее.

«Математика предоставляет нам возможность демонстрировать принципиальную неуверенность, – пишет Элленберг. – То есть занимать твердую позицию и говорить не просто «я не знаю», а «я в этом не уверен, вот почему и вот примерно в какой степени».

### Противоречие в целях

Принципы логики говорят о том, что если добавить маленькое противоречие в любой элемент формальной системы, то вся она рухнет. Автор иллюстрирует это простым приме-